Esercizio 1.8. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, int$(K) \neq \varnothing$, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione con queste proprietà: 1) f è continua su K; 2) f è differenziabile in int(K); f è costante su ∂K.

Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \text{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.

Metodo 1 — Teorema di Weierstrass

K è un insieme compatto, e quindi è chiuso, e dunque coincide con la sua chiusura $\overline{K}$, cioè con l'insieme di tutti i suoi punti di chiusura. Un punto di ciusura o è interno o è di frontiera, per cui $K = \text{int}(K) \cup \partial K$. f è continua su un compatto e quindi, per il teorema di Weierstrass, assume minimo e massimo assoluti su K. Si presentano i seguenti casi:

1. f assume sia il minimo che il massimo sulla frontiera ∂K. Il tal caso poiché su di essa è costante si ha $\max f = \min f = c$, con c una costante. Poiché si deve avere $\min f \leq f(x) \leq \max f \ \forall x \in K$, si desume che la funzione è costante su tutto l'insieme, e quindi ha gradiente nullo in tutti i punti.

2. f assume almeno uno tra massimo e minimo nell'interno di K. In tal caso, poiché f è differenziabile, la *Prima condizione necessaria* per lo studio dei massimi e minimi assicura che l'estremo sarà assunto su un punto critico, ovvero su un punto dove $\nabla f(x) = 0$. Avremo quindi di certo almeno un punto che soddisfa la condizione voluta.

Nel caso K sia unione di più sottoinsiemi compatti, si può applicare il ragionamento soprastante a ciascuno di essi che non sia un punto isolato.

Metodo 2 — Proprietà del gradiente

Iniziamo prendendo due punti distinti sulla frontiera di K, x e y, scegliendoli in modo che il segmento che li unisce $[x; y]$ **non** sia interamente contenuto nella frontiera di K, ma che sia, invece, interamente contenuto in K. Poiché K è un insieme compatto, è certamente limitato: quindi, la sua frontiera non può essere semplicemente un iperpiano di $\mathbb{R}^n$, perché i due semispazi che determina non sono limitati. È quindi sempre possibile trovare un segmento con estremi due punti della frontiera di K che non è contenuto interamente in ∂K. Poiché inoltre l'interno di K non è vuoto, tra questi segmenti con gli estremi sulla frontiera ne esistono certamente che sono interamente contenuti in K medesimo.

Parametrizziamo il segmento con una curva $\gamma : [0; 1] \longrightarrow K \subset \mathbb{R}^n$ definita come:

$$\gamma(t) = xt + (1 - t)y$$

Al variare di t in [0;1], la curva associa al parametro un punto che percorre il segmento. Possiamo comporre la funzione f con la curva γ, trovando la funzione scalare $\varphi : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di una varabile reale:

$$\varphi(t) = f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$$

Questa funzione è una funzione continua e differenziabile (lo sono f e γ). Vale quindi per questa funzione il teorema di Lagrange unidimensionale, ovvero:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \frac{d\varphi}{dt}(t_0)$$

per almeno un opportuno $t^\star \in [0;1]$. Tuttavia vale $\varphi(1) = f(\gamma(1)) = f(x) = f(y) = f(\gamma(0)) = \varphi(0)$ perché x e y sono sulla frontiera di K, dove f è costante. Dunque si ha che:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = 0$$

Per il teorema del differenziale di funzioni composte, si ha inoltre che:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = \big\langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) \big\rangle$$

Si verifica inolte facilmente che il vettore φ' è costante e pari a $(x - y)$. Indicando il punto $\varphi(t_0)$, interno al segmento $[x; y]$, con z_0, si otteniene che:

$$\langle \nabla f(z_0), x - y \rangle = 0$$

Ciò implica che almeno uno dei due fattori è nullo, oppute che i due vettori sono perpendicolari. Poiché x e y sono diversi, se cadiamo nel primo caso il gradiente è nullo e abbiamo terminato. Se siamo nel secondo caso, al contrario, significa che il gradiente nel punto dove la derivata di φ si annulla è perpendicolare al segmento che unisce x a y.

Definiamo una seconda curva $\zeta : [a; b] \longrightarrow K \subset \mathbb{R}^n$ che parametrizza un nuovo segmento che passa per z_0 ed ha la stessa direzione di $\nabla f(z_0)$. Scegliamo opportunamente gli estremi a e b dell'intervallo di dominio di ζ in maniera che $\zeta(a)$ e $\zeta(b)$ siano punti sulla frontiera di K.

$$\zeta(t) = z_0 + \frac{\nabla f(z_0)}{|\nabla f(z_0)|} t$$

Possiamo allora definire una seconda funzione composta $\psi(t) = f \circ \zeta(t)$ che ha le stesse proprietà della φ, ma è definita su un segmento diverso e perpendicolare al primo. Ripetendo gli stessi passi si trova, in totale analogia con quanto determinato per la funzione φ:

$$\big\langle \nabla f(\psi(t_1)), \psi'(t_1) \big\rangle = 0$$

Ponendo $\psi(t_1) = z_1$, ed essendo la ψ' il vettore costante $\frac{\nabla f(z_0)}{|\nabla f(z_0)|}$, si ritrova che

$$\left\langle \nabla f(z_1), \frac{\nabla f(z_0)}{|\nabla f(z_0)|} \right\rangle = 0$$

Ciò implica, ancora una volta, che il gradiente di f o è nullo in z_1, o è perpendicolare in quel punto alla direzione del segmento (che era la direzione del gradiente nel primo punto z_0). Se siamo nel primo caso abbiamo terminato, mentre se siamo nel secondo contiuiamo a reiterare il processo: se prima o poi si arriva ad un punto dove il gradiente si annulla la dimostrazione termina.

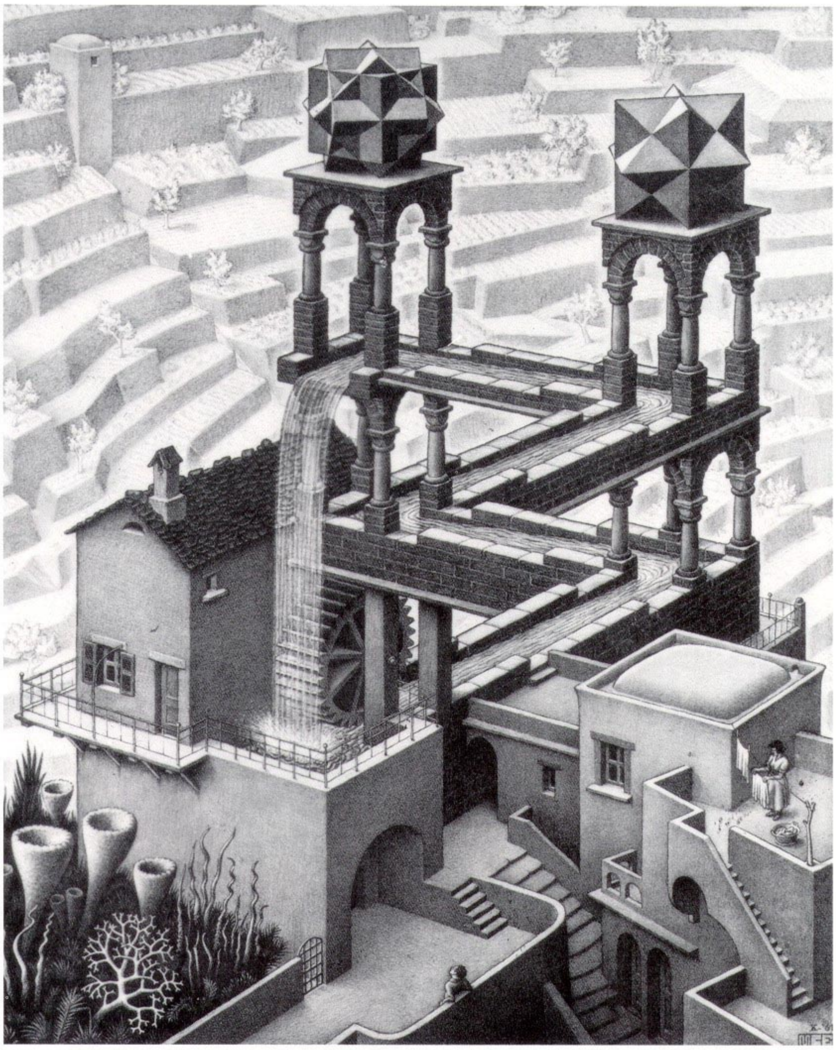
Se non si arriva mai ad un punto dove il gradiente si annulla, abbiamo costruito una successione di punti $z_1, z_2, z_3, ...$ in K dove il gradiente è sempre perpendicolare alla direzione del gradiente nel punto precedente. Ma K è compatto, e allora la successione ammette una sottosuccesione convergente ad un elemento di K. Una successione convergente può assumere valori finiti, e allora converge per forza ad uno dei valori che assume, oppure assumere valori infiniti, e convergere ad un punto di accumulazione. Tuttavia la successione che abbiamo costruito non può assumere valori finiti, perché ciò significherebbe che occasionalmente la direzione del gradiente "torna" su un punto dove si era già passati in precedenza: il gradiente in un punto ha sempre la direzione del massimo incremento e il campo vettoriale del gradiente non può chiudersi su se stesso ($\text{rot}\nabla f(x) = \nabla \times \nabla f(x) = 0$).

La successione converge quindi ad uno $z \in K$. Per la continuità di $\nabla f(x)$, al limite su z avremmo:

$$\left\langle \nabla f(z), \frac{\nabla f(z)}{|\nabla f(z)|} \right\rangle = 0$$

Che ci porta a concludere che $\nabla f(z) = 0$.

Notiamo, infine, come il fatto che si cosideri una sottosuccessione convergente della successione degli z_i ci mette al riparo da possibili problemi nel caso ci sia più di un punto su un segmento che presenta gradiente perpendicolare al segmento stesso: scegliendone uno arbitrariamente, si potrebbe arrivare ad una successione z_i sfortunata che oscilla tra due punti a gradiente nullo (ad esempio un massimo ed un minimo, oppure un punto di sella). Estraendo una sottosuccessione convergente ci si assicura che ci sia un limite ben determinato.



Ah! Lo vedi che te lo dicevo che il rotore del gradiente può non essere nullo!